UFSC - CÁLCULO D - 2014.2 - 1A. PROVA (MODELO A)

RAPHAEL DA HORA

(1) Determine as partes real e imaginária do número complexo $\overline{\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}}$.

Resposta: $\overline{\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}} = 1$.

(2) Escreva o número complexo $(1-i)(\sqrt{3}+i)^3$ na forma polar.

Resposta: $8\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

(3) Determine todos os pontos fixos $z \in \mathbb{C}$ da função $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$, i.e., $f(z) = z$.

Resposta: $\pm i$.

(4) Faça um esboço e identifique o conjunto dos números $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z+1| = |\overline{z}-1|$.

Resposta: $\text{Re } z = 0$.

(5) Determine todos os números complexos z que resolvem $z^3 = 1 + \sqrt{3}i$.

Resposta: $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\text{sen}\dfrac{\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{9} + i\text{sen}\dfrac{7\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{9} + i\text{sen}\dfrac{13\pi}{9}\right)$.

(6) Seja $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1$. Determine $v(x,y)$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja holomorfa.

Resposta: $v(x,y) = -4xy^3 + 4x^3y + 4xy + k$, $k = constante$.

(7) Determine a imagem da região $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \pi$ pela função exponencial $f(z) = e^z$.

Resposta: $\{w \in \mathbb{C} : |w| \geq 1, 0 \leq \text{ arg } w \leq \pi\}$.

(8) Determine a imagem da reta $x = \pi/2$ pela função $f(z) = \text{sen } z$. Dica: $\text{sen } z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Resposta: $\{w \in \mathbb{C} : 1 < \text{Re } w < \infty, \text{ Im } w = 0\}$.

(9) Encontre $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^{(2z-1)} = \exp(2z-1) = 1$.

Resposta: $z = \dfrac{1}{2} + n\pi i$, $n \in \mathbb{N}$.

(10) Mostre que $z = \tan\left(\dfrac{i}{2}\log\dfrac{i+z}{i-z}\right)$. Dica: use $\tan z = \dfrac{\text{sen } z}{\cos z}$, $\text{sen } z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.